Concours Spé. de Recrutement aux G.E. session 1987

CSGE ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE T'

Durée : 2 heures

L'usage des instruments de calcul est autorisé

Le but du problème est de fournir une méthode rapide d'intégration approchée de $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1. On pose : $\displaystyle I_k = \int_0^1 \frac{x^k\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, $k \in \mathbb{N}$.

   a. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, I_k est convergente.

   b. Après le changement de variable : $x = \sin^2\theta$, établir une relation de récurrence entre I_k et I_{k-1}.

   c. Calculer l'expression de I_k en fonction de k.

   d. Donner les valeurs exactes de I_k pour k de 0 à 6.

2. Pour P et Q, polynômes réels, on pose : $\displaystyle < P, Q > = \int_0^1 \frac{P(x)\,Q(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

   a. Montrer que $< P, Q >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

   b. On choisit $P_0 = 1$. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, donner les expressions de P_1, P_2, P_3, polynômes de coefficient dominant 1, tels que (P_0, P_1, P_2, P_3) soient deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire précédent.

   c. Calculer x_1, x_2, x_3 les zéros de P_3. (On vérifiera que 1/2 est zéro de P_3.)

3. *a.* Donner les expressions des trois polynômes d'interpolation de Lagrange l_i, définis par : $l_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ et $l_i(x_i) = 1$ pour i de 1 à 3 et j de 1 à 3.

   b. Calculer $\displaystyle\lambda_i = \int_0^1 \frac{l_i(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ pour i de 1 à 3.

   c. Soit f une fonction continue sur [0,1]. Indiquer pourquoi :

   $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ peut être approchée par $\displaystyle\frac{\pi}{3}\sum_{i=1}^{3} f(x_i)$.

4. *a.* Vérification pour $f(x) = x^k$, avec k de 0 à 6.

   Pour quelles valeurs de k, la formule approchée précédente est-elle exacte? Pour les autres valeurs de k, indiquer l'erreur commise.

   b. Test de la méthode pour $\displaystyle f(x) = \frac{1}{1+x}$.

   Calculer à l'aide de primitives :

   $\displaystyle K = \int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. $\left(\text{On pourra poser : } u = \frac{1}{1+x}\right)$

   c. Calculer une valeur approchée de K par la méthode ci-dessus.

• • •